Der Goldene Schnitt

Gliederung:

1. Definition

Eine Strecke wird im **Verhältnis** des Goldenen Schnittes geteilt, wenn sich **die beiden Teilstücke zueinander verhalten wie das längere Teilstück zur ganzen Strecke**.

Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich **die größere zur kleineren verhält wie die Summe aus beiden zur größeren**.

Veranschaulichung:

x **a-x**

a=x+(a-x)

Die längere Teilstrecke (hier x) wird Major genannt, die kürzere Teilstrecke (hier a-x) Minor.

Goldener Schnitt ϕ (Phi):

$$\frac{\text{Gesamtstrecke}}{Major} = \frac{Major}{Minor} \quad = \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \quad = \quad \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \quad = \quad \mathbf{1{,}618\ldots}$$

oder genauso der Kehrwert

$$\frac{Major}{\text{Gesamtstrecke}} = \frac{Minor}{Major} \quad = \quad \frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} \quad = \quad \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \quad = \quad \mathbf{0{,}618\ldots}$$

2. Beweis

Wie teilt man nun eine beliebige Strecke a im Verhältnis des Goldenen Schnitts?

$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ **oder** $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

$$x^2 = a \cdot (a-x)$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

$x^2 + ax - a^2 = 0$ **(Bestimmungsgleichung des Goldenen Schnittes)**

Lösen der Quadratischen Gleichung:

p,q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ hier mit p=a und q=-a²

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = a \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} \approx a \cdot 0{,}618$$

(x_2 bleibt unberücksichtigt, da es keine negativen Strecken gibt.)

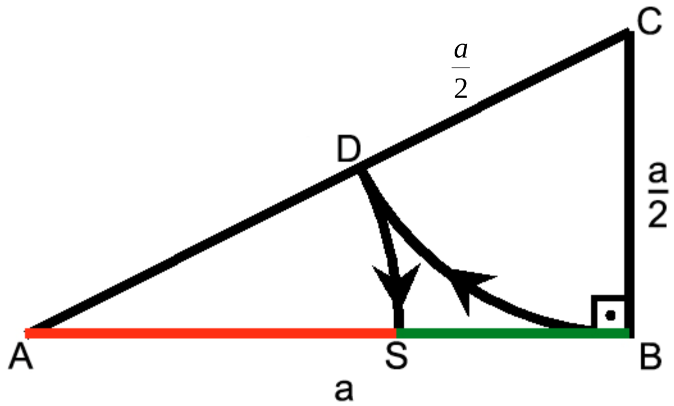
Also:

x= $a \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$

$\frac{x}{a} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$ **(Goldener Schnitt)** q.e.d.

3. Konstruktion

Heute gebräuchlichste Konstruktion:



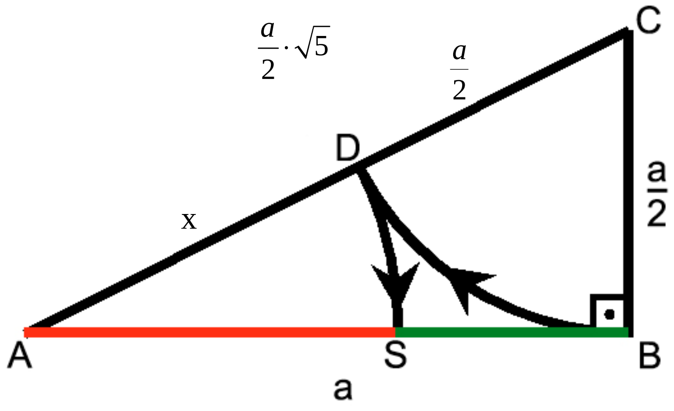
Konstruktionsbeschreibung:

1) Man zeichne $|AB| = a$.
2) Man errichte das Lot von a in B mit der Länge $|BC| = \frac{a}{2}$.
3) Man zeichne auf $\overline{AC}$ den Punkt D mit $|DC| = \frac{a}{2}$ ein.
4) Der Kreis mit dem Radius $|AD|$ schneidet $\overline{AB}$ im Punkt S.

Dieser Punkt S schneidet $|AB| = a$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Also gilt: $\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AS|}{|SB|}$ bzw. $\frac{a}{Major} = \frac{Major}{Minor}$

Erklärung:



Nach Satz des Pythagoras gilt:

$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}=|AC|$$

Außerdem wissen wir:

$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=x^2+xa+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad \left|-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right.$$

$$a^2=x^2+xa$$

$0=x^2+xa-a^2$ **(Bestimmungsgleichung des Goldenen Schnittes)**

Also:

x= $a\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

$\frac{x}{a}=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ **(Goldener Schnitt)** q.e.d.

Sehen wir uns außerdem einmal die **Teilstrecken** von $|AC|$ genauer an:

$|AC|=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}$ =x+ $\frac{a}{2}=a\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}+\frac{a}{2}=\frac{a\cdot(\sqrt{5}-1)+a}{2}=\frac{a\cdot(\sqrt{5}-1+1)}{2}=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}$ q.e.d.

4. Didaktik

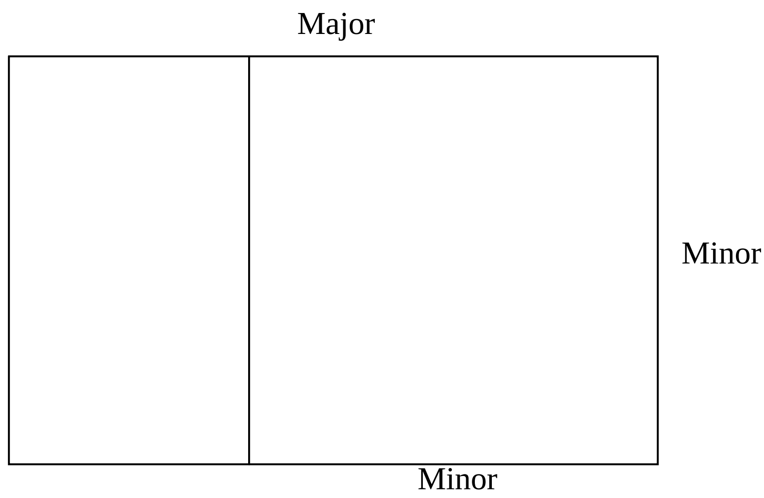
Der Goldene Schnitt ist Stoff für die 9. bis 10. Klasse. In Schleswig-Holstein wird er normalerweise nur an Gymnasien unterrichtet, wenn überhaupt. Das Thema wird in SH nur im Lehrplan für die 9. Klasse am Gymnasium erwähnt. Dort heißt es: **„Historische Bezüge ergeben sich bei der Behandlung des Goldenen Schnitts.“** Das ist alles. Man kann es also

unterrichten, muß es aber nicht. Anzusiedeln ist das Thema mathematisch bei den **Eigenschaften zentrischer Streckungen** (siehe S. 73 im Lehrplan Mathematik SH für Sek. 1).
Der Goldene Schnitt wird gerne als **Projektthema** unterrichtet, da man sehr schön **fächerübergreifend** (Mathe, Kunst, Geschichte, Biologie, Philosophie, Musik, Technik) arbeiten kann. Beispiele dafür sind in der Quellenangabe zu finden.
Um den Goldenen Schnitt einzuführen, sollte folgendes **Grundwissen** da sein: Konstruieren mit Zirkel und Lineal; Lösen Quadratischer Gleichungen; Satz des Pythagoras. Ein sinnvolles Untersuchungsobjekt für den Goldenen Schnitt ist auch das **regelmäßige Fünfeck** (Pentagon) bzw. dessen Pentagramm. Dafür sollten die Schüler mit Ähnlichen und Kongruenten Dreiecken vertraut sein. Auch läßt sich am Pentagon die **Irrationalität** gut veranschaulichen.
Der Goldene Schnitt hat eine sehr große **Bedeutung** in der Malerei (seit der Renaissance) und Architektur (schon in der Antike und sogar bei den Ägyptischen Pyramiden). Heute ist der Goldene Schnitt außerdem Bestandteil der Bildkomposition im Foto- und Filmbereich. Auch in der Biologie läßt sich das Verhältnis des Goldenen Schnittes oft entdecken (Pflanzenwachstum).
Der Goldene Schnitt ist ein weites Feld. Man kann ihn finden in Fraktalen, in Fibonaccio-Folgen, Kettenbrüchen, im Pentagon, in der Goldenen Geometrie, in platonischen Körpern, in Spiralen, in Spieltheorien, in den menschlichen Proportionen, in der Natur und Kunst.
Einiges davon kann man in der Sekundarstufe 1 unterrichten, vieles aber auch erst in der Sekundarstufe 2. Wirklich tiefgehend kann nur der **Projektunterricht** sein.

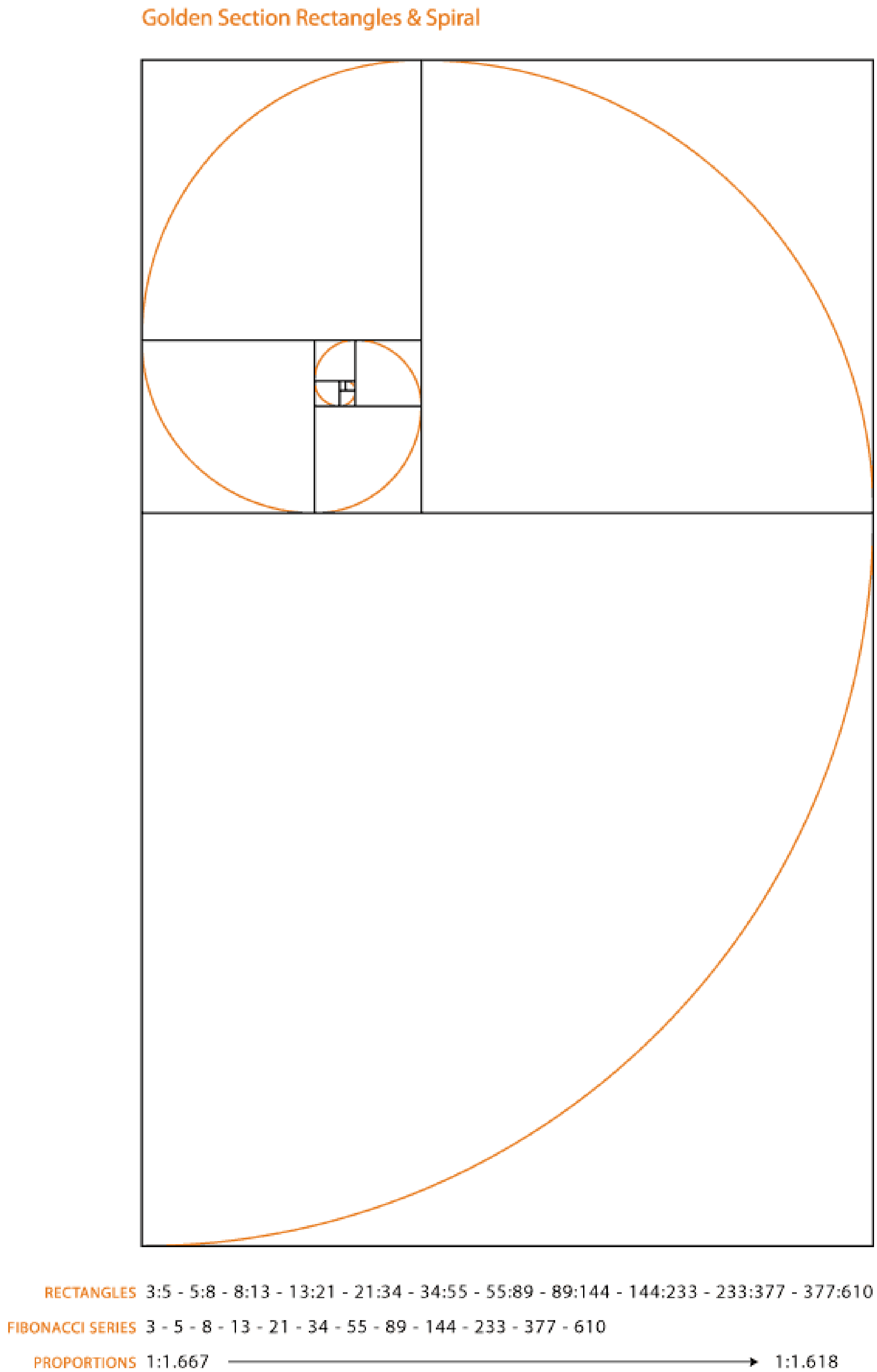
5. Praxis: Das Goldene Rechteck

Die Seitenlängen eines Goldenen Rechteckes entsprechen dem Goldenen Schnitt.

$$\frac{\text{Major+Minor}}{Major} = \frac{Major}{Minor} = 1{,}618\ldots$$



Teilt man das Goldene Rechteck so, daß der Minor ein Quadrat ergibt, entsteht wieder ein Goldenes Rechteck beim übrigen Teil. Dieses kann man wiederum so teilen, daß ein kleineres Goldenes Rechteck entsteht (siehe Abbildung unten). Die Viertelkreise der Quadrate ergeben eine Goldene Spirale.



Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/44/Golden-Section.png (27.04.2008)

Origami: Das Goldene Rechteck aus einem Quadrat falten

Aus jedem beliebigen Quadrat kann man ein Goldenes Rechteck falten.

Anleitung:

- Nehmt ein Blatt Papier und schneidet ein Quadrat (möglichst groß) aus.
- Faltet das Quadrat möglichst exakt nach folgender Faltbeschreibung:

Faltbeschreibung zur Abbildung 75: (l) Mittellinie EF, (2) Diagonale AF, (3) Halbierende des Winkels BAF, (4) Zurückbiegen auf Höhe G, (5) Goldenes Rechteck $ABGH$.

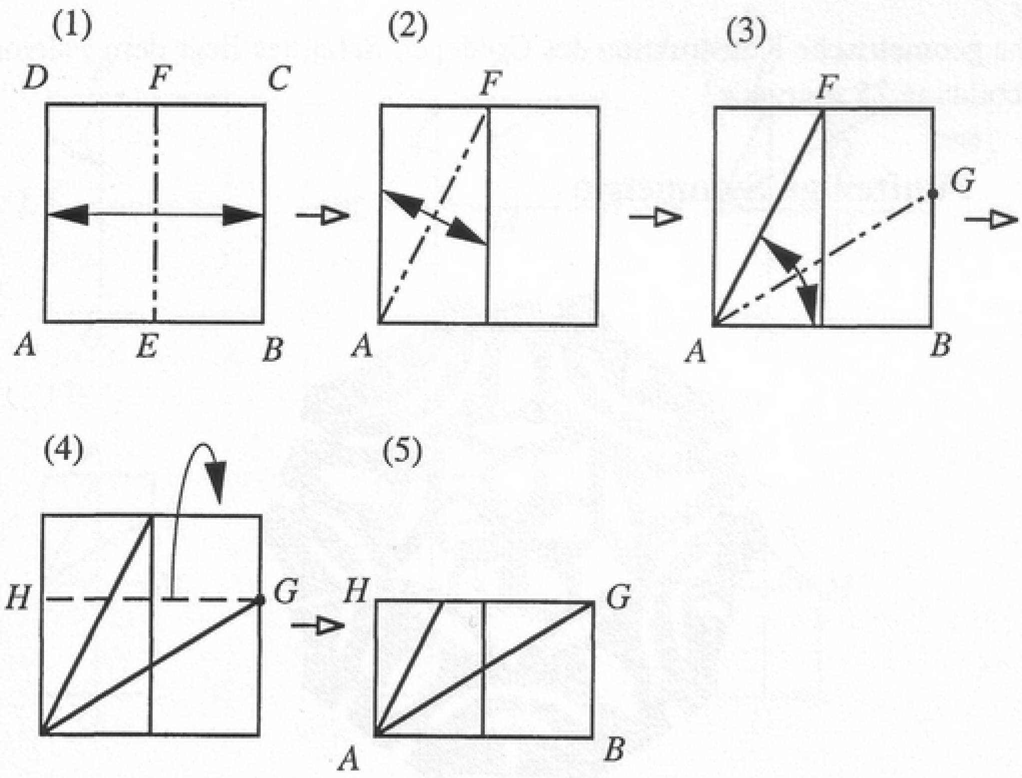


Abb. 75 Das Goldene Rechteck

Quelle: Walser, H.: Der Goldene Schnitt, Seite 63

- Nun könnt Ihr das Goldene Rechteck ausschneiden.
- Wenn Ihr dann daraus ein Quadrat der kleineren Seite abteilt, solltet Ihr ungefähr die Seitenverhältnisse des Goldenen Schnittes wiederfinden.
- Meßt eure Seiten nach und teilt sie im Goldenen Schnitt.
- Welche Ergebnisse bekommt Ihr?

6. Hilfreiche Quellen

Theoretisches Hintergrundwissen:

Beutelspacher, A. u. Petri, B.: *Der Goldene Schnitt.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1988

- Deutschsprachiges Standartwerk. Sehr theoretisch und umfassend. Sehr viele geometrische Beweise und Zusammenhänge.

Walser, H.: *Der Goldene Schnitt*. Teubner, Stuttgart, Leipzig 1993

- Sehr anschaulich und umfassend. Viele Denkaufgaben und Anregungen zum Ausprobieren.

Konkrete Unterrichtsgestaltung:

Schupp, H.: *Geometrie in der Sekundarstufe 1*. BELTZ, Weinheim 1971 (Seite 174-192)

- Ausgearbeitete Unterrichtseinheit zum Thema. Goldener Schnitt wird am Pentagon verdeutlicht.

Barth, E.: *Anschauliche Geometrie*. Ehrenwirth, 1994 (Seite 134-149)

- Schulbuch für die 9. Klasse. Einführung des Themas mit dem Pentagon und dem Goldenen Rechteck, inklusive Aufgaben.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein: *Lehrplan für die Sekundarstufe I der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Gesamtschule, Mathematik.* Kiel 1997

- Thema wird nur kurz erwähnt auf Seite 73. Thema unverbindlich und nicht konkret.

Zeitschriften:

Mathematik lehren, Heft 55, 1992

- Fast die gesamte Ausgabe widmet sich dem Goldenen Schnitt. Hintergründe und konkrete Arbeitsvorlagen. Fächerübergreifend und inklusive Vorstellung eines Projektunterrichts.

Mathematik lehren, Heft 121, 2003

- Zweiseitiger Artikel. Ein paar kurze Anregungen für die Unterrichtsgestaltung.

Internet:

Projekt „Goldener Schnitt“:
http://www.lmg.pcom.de/faecher/goldsect.htm#Teil1 (27.04.2008)

- Vorstellung einer 3-wöchigen, fächerverbindenden Unterrichtseinheit in Klasse 9.

Der Goldene Schnitt:
http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt/lu/ (27.04.2008)

- Sehr anschauliche, interaktive Einführung ins Thema, inklusive Aufgaben. Sehr empfehlenswert für einen Ausflug in den Computerraum. Toll!

Wikipedia:
http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Definition_und_Goldene_Zahl (27.04.2008)

- Viele Teilaspekte. Zum Nachschlagen geeignet.

Geonext:
http://mathematik.lernnetz.de/geonext/geonext.html?group=5 (27.04.2008)

- Geometrisches Zeichenprogramm für den Browser. Kein extra Programm nötig.