Kubische und quartische Gleichungen:

Die ersten Mathematiker, die allgemeine Lösungswege für kubische und quartische Gleichungen gefunden haben, waren die **italienischen Mathematiker der Renaissance** (ca. 1500-1600).

Ferro und **Tartaglia** hatten bereits Anfang des 16. Jhds Lösungen für **kubische Gleichungen** der Form **$x^3+ax=b$** gefunden, hielten dieses Wissen aber geheim.


HIERONYMI
CARDANI,
ARTIS MAGNÆ
SIVE
DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
LIBER VNVS.
ANDREÆ OSIANDRO
viro eruditiss.
S. P. D.

Ein Meilenstein für die Algebra war dann **1545 Cardanos Buch „Ars Magna“**, in welchem er Tartaglias Lösungsformel veröffentlichte, welche als **Cardanische Formel** in die Geschichte einging.
Diese Formel stieß aber an ihre Grenzen, da dadurch auch **negative Radikanten von Quadratwurzeln** (z.B.: $\sqrt{-121}$) entstehen konnten (**casus irreducibilis**). Dies war die Geburtsstunde der **komplexen Zahlen** (siehe auch Seite 118)! Verstanden und akzeptiert wurden diese Zahlen, wie auch die negativen Zahlen und Viererpotenzen (x^4) allerdings noch lange nicht.

Als einziger beschäftigte sich **Bombelli** intensiv mit der Lösung von **komplexen Ausdrücken.** Seine Ergebnisse veröffentlichte er **1572** in seinem Buch **„L´Algebra“**.

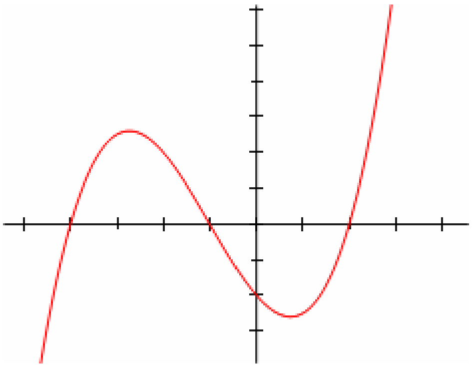
1591 entwickelte **Vieta** auch einen Lösungsweg für die allgemeine **kubische Gleichung $ax^3+bx^2+cx+d=0$.**

Schon **1540** fand **Ferrari** einen Lösungsweg für allgemeine quartische **Gleichungen ($x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$).** Da darin aber auch eine kubische Gleichung enthalten war, konnten quartische Gleichungen auch erst nach Entdeckung der Lösungen für kubische Gleichungen vollständig gelöst werden.

Ende des 16. Jhds konnte man also schon allgemeine kubische und quartische Gleichungen berechnen; sogar mit komplexen Ausdrücken, auch wenn deren wirkliche Akzeptanz noch gute 200 Jahre dauerte.

Kubische Gleichungen:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$



Schon bekannte Lösungsmethode, die Cardanische Formel *(siehe Seite 118)*:

Für alle Gleichungen der Form:

$x^3+ax=b$ (eigentlich für a>0, b>0)

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

Sonderfall: „casus irreducibilis“:

Beim „casus irreducibilis“ ist der Wert in einer **Quadratwurzel <u>negativ</u>**!

Folge: Eine **komplexe** Zahl entsteht. (z.B. $\sqrt{-x}$)

Ein Beispiel:

Wenn $x^3-15x=4$ mit a=-15, b=4

Dann

$$x=\sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{4^2}{4}+\frac{-15^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{4^2}{4}+\frac{-15^3}{27}}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{16}{4}+\frac{-3375}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{16}{4}+\frac{-3375}{27}}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-125}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$ $\Rightarrow$ “Sackgasse“: **casus irreducibilis**

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{11^2\bullet(-1)}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{11^2\bullet(-1)}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{11^2}\bullet\sqrt{(-1)}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{11^2}\bullet\sqrt{(-1)}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+11\bullet i}+\sqrt[3]{2-11\bullet i}$$

Es entsteht eine **negative** Quadratwurzel (**komplexe Zahl** $\sqrt{-121}$), der „**casus irreducibilis**“, der bei **Cardano** in eine „Sackgasse“ führte, da er in diesem Fall nicht weiterrechnen konnte. Erst **Bombelli** beschäftigte sich konsequent mit diesen komplexen Ausdrücken und veröffentlichte **1572** folgenden Lösungsweg im Buch „**L´Algebra**“:

Frage:
Wie lässt sich aus $(2 \pm 11i)$ die **Kubikwurzel** ziehen?
Lösung:
Der **Radikant** $(2 \pm 11i)$ muss in die **Kubikform** $(a \pm bi)^3$ gebracht werden!
Denn: $\sqrt[3]{(a \pm bi)^3} = (a \pm bi)$
Unser **Ziel** ist also dies: $(2 \pm 11i) = (a \pm bi)^3$

Nun müssen wir beide Seiten vergleichen, um herauszufinden, welche Werte die Unbekannten **a** und **b** haben.

Fall „plus": Wir setzen gleich: $(2 + 11i) = (a + bi)^3$

Ziel: Wir wollen die **rechte** Seite ($(a+bi)^3$) auch als **einzelne komplexe** Zahl schreiben:
Wir multiplizieren aus: $(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$
Wir ordnen neu: $= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2bi - b^3i)$

Wir klammern i aus: $= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3) \cdot i \Rightarrow$ komplexe Zahl
Diese Schreibweise entspricht $(2+11i)$: $=(\quad 2 \quad + \quad 11 \quad \cdot i) \Rightarrow$ komplexe Zahl
Realteil + Imaginärteil $\cdot\, i$

Nun haben wir zwei komplexe Zahlen ($(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3) \cdot i$) und $(2 + 11 \cdot i)$, deren **reale und imaginäre Teile** gleich sein sollen.

Also können wir schon mehr über a und b sagen:
Es gilt: $(a^3 - 3ab^2) = 2$ Realteil
Und: $(3a^2b - b^3) = 11$ Imaginärteil

Beide Seiten kann man in je **2 Faktoren** zerlegen: $a \cdot (a^2 - 3b^2) = 2 \cdot 1$ (a ausklammern)
Genauso: $b \cdot (3a^2 - b^2) = 11 \cdot 1$ (b ausklammern)

Daraus folgt, dass entweder **a=2** oder **a=1** und dass entweder **b=11** oder **b=1** gilt.

Fall **a=2**) einsetzen in: $a(a^2 - 3b^2) = 2$
$2 \cdot (2^2 - 3b^2) = 2$
Ausmultiplizieren: $8 - 6b^2 = 2 \quad | -8$
$-6b^2 = -6 \quad | :(-6)$
$b^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$
b=1 $\Rightarrow$ **wahr, (da hier auch a=2)**

Alle anderen Möglichkeiten erweisen sich beim Nachrechnen als **falsch**:
Im Fall **a=1)** ist **b=** $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$ **falsch** (in $a(a^2 - 3b^2) = 2$ eingesetzt)

Im Fall **b=1)** ist **a=** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$ **falsch** (in $b(3a^2 - b^2) = 11$ eingesetzt)

Im Fall **b=11)** ist **a=**$\sqrt{\frac{1342}{33}}$ $\Rightarrow$ **falsch** (in $b(3a^2-b^2)=11$ eingesetzt)

Also gilt in diesem Fall nur **a=2** und **b=1** und nichts anderes!

Jetzt können wir **a=2** und **b=1** einsetzen in $(a+bi)^3$**:**

$(a+bi)^3=(2+1i)^3=(2+i)^3$ (was auch gleich $(2+11i)$ ist!)

Jetzt können wir $(2+11i)$ durch $(2+i)^3$ ersetzen und endlich die **Kubikwurzel** ziehen:

$\sqrt[3]{(2+11\cdot i)}=\sqrt[3]{(2+i)^3}$ =**(2+i)** **(Kubikwurzel** gezogen)

Auf dem gleichen Weg kommt man beim „**minus**"-Fall $(2-11i)=(a-bi)^3$ zur Lösung**.**

Auch hier erhält man beim Nachrechnen **a=2** und **b=1** und somit gilt:

$(a-bi)^3=(2-1i)^3=(2-i)^3$ **(=**$(2-11i)$**)**

und deshalb ist auch $\sqrt[3]{(2-11\cdot i)}=\sqrt[3]{(2-i)^3}$ =**(2-i)** **(Kubikwurzel** gezogen)

Es gilt hier also allgemein:

$\sqrt[3]{(2\pm 11\cdot i)}=\sqrt[3]{(2\pm i)^3}$ =**(2 ± i)** **(Kubikwurzel** gezogen)

Damit können wir die kubische Gleichung $x^3-15x=4$ leicht lösen!

Mit der **Cardanischen Formel** hatten wir schon herausgefunden, dass

x= $\sqrt[3]{2+11\cdot i}+\sqrt[3]{2-11\cdot i}$

Und jetzt können wir die **Radikanten** $(2\pm 11\cdot i)$ auch durch $(2\pm i)^3$ **ersetzen** und davon die **Kubikwurzel ziehen**:

x= $\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}=(2+i)+(2-i)$ =(2+2)+(*i*-*i*)=**<u>4</u>**

Probe:

$x^3-15x=4$ und x=4

$4^3-15\bullet 4=4$

64-60=4

<u>4=4</u> $\Rightarrow$ **wahr**

Lösung für generelle kubische Gleichungen:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

Die **Cardanische Formel** ist nur auf **kubische** Gleichungen **ohne quadratischen Term** anwendbar. (**$ax^3+cx+d=0$**; bzw. als Standardform: $x^3+ax=b$)

Vieta zeigte 1591, dass die **allgemeine** kubische Gleichung (ax^3+**bx^2**$+cx+d=0$) immer auch in die **spezielle Form** ($ax^3+cx+d=0$) **ohne quadratischen** Term umgewandelt werden kann. Diese ist dann auch wieder durch die Cardanische Formel lösbar!

Eliminieren des quadratischen Terms:

$z^3+cz^2+dz+e=0$

Zuerst ersetzt man **z** durch eine Unbekannte **x** mit einer Hilfszahl **h**:

Substitution: **$z=x+h$**

Einsetzen: $(x+h)^3 + c(x+h)^2 + d(x+h) + e=0$

Ausmultiplizieren: $(x^3+3x^2h+3xh^2+h3) + (cx^2+2cxh+ch^2) + (dx+dh) +e=0$

Hier gibt es aber immer noch **quadratische** Terme, außerdem stört die **Unbekannte h**. Dies kann durch eine weitere **Substitution** gelöst werden:

Substitution: $h=-\frac{c}{3}$ in $(x^3+3x^2h+3xh^2+h3) + (cx^2+2cxh+ch^2) + (dx+dh) +e=0$

Einsetzen:

$$\left(x^3+3x^2\bullet\left(-\frac{c}{3}\right)+3x\bullet\left(-\frac{c}{3}\right)^2+\left(-\frac{c}{3}\right)^3\right)+\left(cx^2+2cx\bullet\left(-\frac{c}{3}\right)+c\bullet\left(-\frac{c}{3}\right)^2\right)+\left(dx+d\bullet\left(-\frac{c}{3}\right)\right)+e=0$$

Ausmultiplizieren:

$$\left(x^3-cx^2+\left(\frac{3c^2x}{9}\right)-\left(\frac{c^3}{27}\right)\right)+\left(cx^2-\left(\frac{2c^2x}{3}\right)+\left(\frac{c^3}{9}\right)\right)+\left(dx-\left(\frac{dc}{3}\right)\right)+e=0$$

Ordnen nach x:

$$x^3+(cx^2-cx^2)+\left(\frac{3c^2x}{9}-\frac{2c^2x}{3}\right)+\left(\frac{c^3}{9}-\frac{c^3}{27}\right)+\left(dx-\left(\frac{dc}{3}\right)\right)+e=0$$

Zusammenfassen und kürzen:

$$x^3+\left(\frac{c^2x}{3}-\frac{2c^2x}{3}\right)+\left(\frac{3c^3}{27}-\frac{c^3}{27}\right)+\left(dx-\left(\frac{dc}{3}\right)\right)+e=0$$

$$x^3+\left(\frac{1}{3}c^2x-\frac{2}{3}c^2x\right)+\frac{2}{27}c^3+\left(dx-\left(\frac{dc}{3}\right)\right)+e=0$$

Ergebnis:

$$x^3-\frac{1}{3}c^2x+\frac{2}{27}c^3+dx-\frac{1}{3}dc+e=0$$

Man sieht, dass der **quadratische x**-Term (bx^2) **eliminiert** wurde.

Diese Gleichung können wir nun in die Standardform **($x^3+ax=b$)** bringen und sie mit der Cardanischen Formel lösen.

Dazu **gruppieren** wir erstmal alle Terme mit und ohne **x**:

$$x^3 + (-\frac{1}{3}c^2x \;+ dx) + (\frac{2}{27}c^3 - \frac{1}{3}dc + e) = 0 \qquad \Big| -(\frac{2}{27}c^3 - \frac{1}{3}dc + e)$$

Wir **klammern x aus** und bringen **alles ohne x** auf die **rechte** Seite:

$$x^3 + (-\frac{1}{3}c^2 \;+ d)x = -(\frac{2}{27}c^3 - \frac{1}{3}dc + e)$$

Vergleiche: **(x^3 + ax = b)** $\Rightarrow$ **Standardform** für Cardanische Formel

Jetzt haben wir eine **lösbare** kubische Gleichung mit**:**

$a = (-\frac{1}{3}c^2 + d)$

$b = -(\frac{2}{27}c^3 - \frac{1}{3}dc + e)$

Die **Variablen c, d und e** sind bereits bekannt aus der **ursprünglichen** Gleichung ($z^3+cz^2+dz+e=0$). Also kann man jetzt **a** und **b** ausrechnen.

Durch **a** und **b** wiederum kann man mit Hilfe der **Cardanischen Formel x** ausrechnen:

x^3 + ax = b und $x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$

Jetzt haben wir die **substituierte** kubische Gleichung **($x^3+ax=b$)** gelöst und kennen **x**.

Die **eigentliche** allgemeine Gleichung lautete aber:

$z^3+cz^2+dz+e=0$

Die gesuchte Unbekannte ist hier **z**.
Was wissen wir über **z**?
z=x+h (Substitution)

x kennen wir bereits. Jetzt fehlt uns nur noch **h**.
Was ist **h**?

h= $-\frac{c}{3}$

Also: z=x+ $-\frac{c}{3}$

Jetzt können wir endlich auch **z** ausrechnen und haben somit auch einen Lösungsweg für **allgemeine** kubische Gleichungen der Form **$z^3+cz^2+dz+e=0$.**

<u>Ein Beispiel:</u>

$z^3+3z^2-6z-36=0$

Gesucht ist **z**.
Gegeben ist **c=3, d= -6 und e= -36**

Damit können wir erstmal **a und b** ausrechnen:

a$= (-\frac{1}{3}c^2 + d) = -\frac{3^2}{3} - 6 = -3 - 6 = -9$

$\mathbf{b}=-(\frac{2}{27}c^3-\frac{1}{3}dc+e)=-\frac{2\bullet 3^3}{27}+\frac{3\bullet(-6)}{3}+36=-\frac{2\bullet 27}{27}-6+36=-2+30=28$

a= -9 und b=28

Mit **a** und **b** können wir wiederum **x** ausrechnen (**Cardanische Formel**):

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{28}{2}+\sqrt{\frac{28^2}{4}+\frac{(-9)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{28}{2}-\sqrt{\frac{28^2}{4}+\frac{(-9)^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{14+\sqrt{\frac{784}{4}-\frac{729}{27}}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{\frac{784}{4}-\frac{729}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{14+\sqrt{196-27}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{196-27}}$$

$$=\sqrt[3]{14+\sqrt{169}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{169}}$$

$$=\sqrt[3]{14+13}+\sqrt[3]{14-13}$$

$$=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}$$

=3 + 1=**4**

x=4

Gesucht war **z**.
Es gilt: **z=x+h**

$\mathbf{h}=-\frac{c}{3}=-\frac{3}{3}=\mathbf{-1}$

h= -1

Jetzt können wir endlich **z** ausrechnen und somit die **Beispielgleichung** endgültig lösen.

z=x+h=4-1=**3**

z=3 (für $\mathbf{z^3+3z^2-6z-36=0}$)

Probe:

$3^3+3\bullet 3^2-6\bullet 3-36=0$

27+27-18-36=0

54-54=0

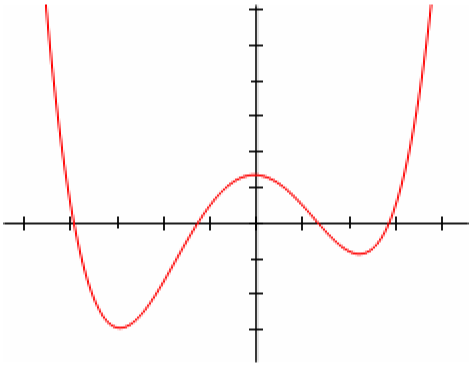
0=0 $\Rightarrow$ **wahr**

Nach diesem Verfahren können wir jetzt alle **allgemeinen kubischen** Gleichungen lösen, sogar bei komplexen Zahlen (casus irreducibilis)!

Vieta entwickelte damals auch noch einen einfacheren Lösungsweg für die **spezielle** Form $\mathbf{x^3+3ax=2b}$ (*siehe Seite 152*). Diese Vereinfachung galt somit aber nur für durch 3 teilbare a-Terme und wenn b eine gerade Zahl ist (z.B.: $x^3+9x=32$).
1655 kam auch **Huygens** auf **anderem** Rechenweg auch zu einer **Lösungsformel** für **kubische** Gleichungen, die aber eigentlich mit der **Cardanischen Formel** **identisch** war.

Quartische Gleichungen:

x^4 +ax³+bx²+cx+d=0



Bereits **1540** entwickelte Cardanos Schüler **Ferrari** auch einen Lösungsweg für **allgemeine quartische Gleichungen** der Form:

$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (Gegeben sind: **a, b, c und d**; gesucht ist **z**.)

Zunächst **eliminierte** er den **kubischen** Term (az^3) durch **Substitution**:

$$z = x - \frac{a}{4}$$

Einsetzen:

$$\left(x - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(x - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(x - \frac{a}{4}\right) + d = 0$$

Ausmultiplizieren:

$$\left[x^4 - \frac{1}{2}x^3a + \frac{1}{16}x^2a^2 - \frac{1}{2}x^3a + \frac{1}{4}x^2a^2 - \frac{1}{32}xa^3 + \frac{1}{16}a^2x^2 - \frac{1}{32}xa^3 + \frac{1}{256}a^4\right] +$$

$$\left[ax^3 - \frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{2}x^2a^2 + \frac{1}{16}a^3x - \frac{1}{64}a^4\right] + \left[bx^2 - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}a^2b\right] + \left[cx - \frac{1}{4}ac\right] + d = 0$$

Terme ordnen:

$$x^4 + (-\frac{1}{2}x^3a - \frac{1}{2}x^3a + ax^3) + (\frac{1}{16}x^2a^2 + \frac{1}{4}x^2a^2 + \frac{1}{16}a^2x^2 - \frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{2}a^2x^2) + (-\frac{1}{32}xa^3 - \frac{1}{32}xa^3 + \frac{1}{16}a^3x)$$

$$+(\frac{1}{256}a^4 - \frac{1}{64}a^4) + bx^2 - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}a^2b + cx - \frac{1}{4}ac + d = 0$$

Alle Terme zusammenfassen:

$$x^4 - \frac{3}{8}a^2x^2 - \frac{3}{256}a^4 + bx^2 - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}a^2b + cx - \frac{1}{4}ac + d = 0$$

Alle Terme von x^3 sind jetzt schon mal **eliminiert**!

Jetzt müssen wir die Gleichung noch nach **Potenzen von x** sortieren, um wieder eine übersichtliche Form zu haben.

$$x^4 + (-\frac{3}{8}a^2x^2 + bx^2) + (-\frac{1}{2}abx + cx) + (-\frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4 + d) = 0$$

x^2 und x ausklammern:

$$x^4 + (-\frac{3}{8}a^2 + b)x^2 + (-\frac{1}{2}ab + c)x + (-\frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4 + d) = 0$$

Vergleiche: x^4 + **px²** + **qx** + **r** **=0**

Unser **erstes** Ziel ist nun erreicht. Wir haben den **kubischen Term eliminiert** und eine Gleichung der Form x^4 **+px²+qx+r=0** erreicht.

p, q und **r** sind hier auch eindeutig bestimmbar:

$p=-\frac{3}{8}a^2+b$

q=$-\frac{1}{2}ab+c$

r=$-\frac{1}{4}ac+\frac{1}{16}a^2b-\frac{3}{256}a^4+$d

Die Werte von **a, b, c** und **d** sind bereits in der **ursprünglichen** Gleichung gegeben gewesen.

Diese **vereinfachte** quartische Form (x^4 **+px²+qx+r=0**) war so aber leider auch noch nicht lösbar. Wie findet man hier **x**?

<u>Ferrari ging so vor:</u>
Ausgehend von x^4 **+px²+qx+r=0** versuchte er erstmal, alles in **Quadratform** (hoch 2) zu bringen. Dazu **ordnete** er die **Seiten** der Gleichung neu an und fügte auf beiden Seiten (px^2+p^2) hinzu:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \qquad |-qx-r$$

$$x^4+px^2=-qx-r \qquad |+px^2+p^2$$

L.S. $\quad x^4+2px^2+p^2=-qx-r+px^2+p^2 \quad$ R.S.

Auf der linken Seite hat er so schon mal ein Quadrat gefunden:

L.S.: $x^4+2px^2+p^2=\left(x^2+p\right)^2$

Die rechte Seite ist so aber noch **kein Quadrat**.
Um das Problem zu lösen, erweiterte Ferrari die ganze Gleichung noch einmal:

$x^4+2px^2+p^2=-qx-r+px^2+p^2 \qquad |+2yx^2+2yp+y^2$ *(Das **y** ist eine Unbekannte,*
| *die wir **<u>später</u>** noch näher bestimmen müssen.)*

$$x^4+2px^2+p^2+2yx^2+2yp+y^2=-qx-r+px^2+p^2+2yx^2+2yp+y^2$$

Die **linke** Seite kann man dann auch wieder als **Quadrat** ausdrücken:

L.S.: $x^4+2px^2+p^2+2yx^2+2yp+y^2=\left(x^2+p+y\right)^2$

Aus der **rechten** Seite muss man jetzt aber auch noch ein **Quadrat konstruieren**:
R.S.: $-qx-r+px^2+p^2+2yx^2+2yp+y^2$
Erstmal ordnet man dazu nach x und x²:
$(px^2+2yx^2)-qx+(-r+p^2+2yp+y^2)$
x² ausklammern:
$(p+2y)x^2-qx+(-r+p^2+2yp+y^2)$

Ziel ist wie gesagt, die **gesamte** rechte Seite als **Quadrat** zu schreiben.
Die **angestrebte** Form lautet hier: **(ax-b)²=a²x²-2abx+b²** (Binomische Formel)

Vergleichen wir die rechte Seite einmal mit dieser binomischen Form:

a^2 x^2 -2abx +b^2

$$(p+2y)x^2 - qx + (-r + p^2 + 2yp + y^2)$$

Wir sehen: x^2 und x sind schon mal in beidem enthalten.

Was sehen wir noch?

$(p+2y)$ soll **a^2** entsprechen**:** $(p+2y)$ = **a^2**

q soll **2ab** entsprechen**:** q =**2ab**

$(-r + p^2 + 2yp + y^2)$ soll **b^2** entsprechen**:** $(-r + p^2 + 2yp + y^2)$ = **b^2**

Und wie können nun $(p+2y)$ und $(-r + p^2 + 2yp + y^2)$ Quadrate sein?

Ferrari wandte jetzt einen „**Trick**" an. Er schrieb die einzelnen Ausdrücke als **Quadrat**, indem er gleichzeitig auch die **Wurzel** davon zog ($\sqrt{}^2$). Dies ist also **neutral**!

Beispiel: $4 = \sqrt{4}^2 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$

Also kann man durch $\sqrt{}^2$ auch schreiben:

$(p+2y) = (\sqrt{p+2y})^2$ = **a^2** $\quad |\sqrt{}$

Wurzel **gezogen**: (±) $\sqrt{p+2y}$ **=a**

$(-r + p^2 + 2yp + y^2) = (\sqrt{-r + p^2 + 2yp + y^2})^2$ = **b^2** $\quad |\sqrt{}$

Wurzel **gezogen**: (±) $\sqrt{-r + p^2 + 2yp + y^2}$ **=b**

Nun wissen wir schon mal was **a** und **b** sind und können endlich auch **beide Seiten** in **Quadratform** schreiben:

L.S. $(x^2 + p + y)^2 = (\sqrt{p+2y} \cdot x - \sqrt{-r + p^2 + 2yp + y^2})^2$ R.S.

Bleibt noch **q**. Was wissen wir über **q**?

q=2ab$=2 \cdot \sqrt{p+2y} \cdot \sqrt{-r + p^2 + 2yp + y^2}$

Wichtig für die **Lösung** der **gesamten** Aufgabe ist diese Gleichung:

q$=2 \cdot \sqrt{p+2y} \cdot \sqrt{-r + p^2 + 2yp + y^2}$

Da wir die Werte für **p, q** und **r** bereits von vorher kennen, haben wir hier eine Gleichung mit nur **einer Unbekannten**, nämlich **y**.

Gesucht ist y.

Gegeben sind:

$$p = -\frac{3}{8}a^2 + b$$

$$q = -\frac{1}{2}ab + c$$

$$r = -\frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4 + d$$

Schauen wir uns die Gleichung einmal genauer an und **lösen nach y auf**:

$$q = 2\bullet\sqrt{p+2y}\bullet\sqrt{-r+p^2+2yp+y^2} \qquad \Big|(\ )^2$$

$$q^2 = 4\bullet(p+2y)\bullet(-r+p^2+2yp+y^2) \qquad \Big|\div 4$$

$$\frac{q^2}{4} = (p+2y)\bullet(-r+p^2+2yp+y^2)$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen:

$$\frac{q^2}{4} = p^3+4yp^2+5y^2p+2y^3-2yr-pr$$

Nach **y** sortieren:

$$\frac{q^2}{4} = 2y^3+5y^2p+(4yp^2-2yr)+(p^3-pr) \qquad \Big|-\frac{q^2}{4}$$

Alles auf **eine Seite** bringen und **y ausklammern**:

$$0=2y^3+5y^2p+(4p^2-2r)y+(p^3-pr-\frac{q^2}{4}) \qquad \Big|\div 2$$

$$0=y^3+\frac{5}{2}y^2p+(2p^2-r)y+(\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}pr-\frac{q^2}{8})$$

Und siehe da, wir haben hier eine **allgemeine <u>kubische</u> Gleichung**, welche wir **lösen** können! (Erst **y^2 eliminieren** durch Substitution, dann **y** mit **Cardanischer Formel** herausfinden.)

Da wir nun **y** ausgerechnet haben, haben wir somit auch die Mittel, das **unbekannte x** der Zwischen-Form $x^4+px^2+qx+r=0$ zu finden. Dazu müssen wir **y, p** und **r** in die Formel $\left(x^2+p+y\right)^2 = (\sqrt{p+2y}\bullet x-\sqrt{-r+p^2+2yp+y^2})^2$ einsetzen und können die einzige Unbekannte **x** ausrechnen *(Wurzel ziehen; alles auf eine Seite bringen; quadratische Gleichung mit **pq-Formel** lösen).*

So haben wir endlich auch einen Wert für **x**.
Ursprünglich gegeben war aber die Formel $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$, in welcher **z** gesucht war. Was war **z** noch mal?

$$z = x-\frac{a}{4}$$

x haben wir errechnet, **a** war schon gegeben. Also haben wir jetzt eine Lösung für **z**! **<u>Fertig!</u>**

Nun können wir auf **Basis** der Lösungswege **<u>kubischer</u> Gleichungen** auch **allgemeine <u>quartische</u> Gleichungen** lösen.

Heureka!