Logik

Aufgaben in: Barwise, Etchemendy. *The language of first-order logic*. CSLI, 1992.

1) S. 119 A3
2) S. 131 A15
3) S. 143 A28

Gliederung:

Aufgabe 1)	S. 2
Aufgabe 2)	S. 5
Aufgabe 3)	S. 7

Aufgabe 1)

S. 119 Nr. 3

Aufgabenstellung:
Gegeben sind die Welt Leibniz.wld und dazu 12 Aussagen aus der Datei Bozo.sen.
Die gegebene Aussagendatei enthält diverse grammatische Fehler, welche ich berichtigen soll. Ziel ist es, alle 12 Aussagen mit möglichst wenigen Änderungen in Bozo.sen in Bezug auf Leibniz.wld zu wahren Aussagen zu machen. Die Welt bleibt dabei unverändert. Die Lösung soll in der Datei 5-3.sen gespeichert werden.

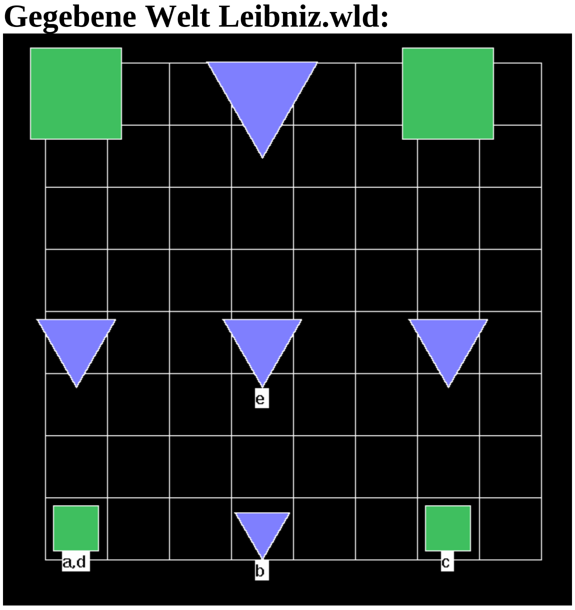
Ursprungsdatei Bozo.sen:

*	1. Small(Cube(a)) FrontOf Tet(e)
T	2. (Cube(a))
*	3. ¬ BackOf(x, b)
*	4. Cube(a) ∧ Cube(b) ∨ Cube(c)
*	5. Cube(a) ↔ Cube(b) ↔ Cube(e)
*	6. ∃x ¬(Cube x)
*	7. ∃a (Cube(a) ∧ Small(a))
*	8. ∃x Cube(x) ∧ Small(x)
T	9. ∃y (Tet(y) ∧ Large(y))
*	10. ∀y (Cube(x) → ¬Medium(x))
*	11. ∀x (Tet(x) ∧ Small(x) → FrontOf(x, e))
T	12. ∀u ((Tet(u) ∧ Medium(u)) → BackOf(u, c))

Lösung 5-3.sen:

T	1. Small(a) ∧ Cube(a) ∧ FrontOf (a,e) ∧ Tet(e)
T	2. Cube(a)
T	3. ∃x ¬ BackOf(x, b)
T	4. Cube(a) ∧ (Cube(b) ∨ Cube(c))
T	5. Cube(a) ↔ (Cube(b) ↔ Cube(e))
T	6. ∃x ¬Cube (x)
T	7. ∃x (Cube(x) ∧ Small(x))
T	8. ∃x (Cube(x) ∧ Small(x))
T	9. ∃y (Tet(y) ∧ Large(y))
T	10. ∀x (Cube(x) → ¬Medium(x))
T	11. ∀x ((Tet(x) ∧ Small(x))→ FrontOf(x, e))
T	12. ∀u ((Tet(u) ∧ Medium(u)) → BackOf(u, c))

Gegebene Welt Leibniz.wld:



Ausdruck 1)
Small(Cube(a)) FrontOf Tet(e)
Wff: Nein
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: Junktoren fehlen, Prädikate in Tarskis Welt werden nur mit entsprechenden Individuenkonstanten (a, b, c,…) zu Aussagen, FrontOf ist ein zweistelliges Prädikat, die Formel small(cube(a)) ist nicht definiert, Individuenkonstanten werden in Klammern gesetzt.
Übersetzung: a ist ein kleiner Würfel, der vor dem Tetraeder e liegt.
Richtige Formulierung: Small(a) $\wedge$ Cube(a) $\wedge$ FrontOf(a,e) $\wedge$ Tet(e)

Ausdruck 2)
(Cube(a))
Wff: Ja
Aussage: Ja
Wahrheitswert: wahr
Übersetzung: a ist ein Würfel.
Hinweis: Dies ist zwar bereits eine wahre Aussage, allerdings sind die Klammern unnötig.
Verbesserung: Cube(a)

Ausdruck 3)
$\neg$ BackOf(x, b)
Wff: Ja
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: x ist in Tarskis Welt keine Individuenkonstante, sondern eine Variable. x ist hier eine freie Variable, die nicht durch einen Quantor gebunden ist und somit ist es noch keine Aussage. Um mit Hilfe von Quantoren eine wahre Aussage in dieser Welt zu formulieren, kommt nur der Existenzquantor in Frage, denn es gibt sehr wohl Individuen hinter b.
Übersetzung: Es gibt mindestens ein x, welches nicht hinter b liegt.
Richtige Formulierung: $\exists$ x $\neg$ BackOf(x, b)
Hinweis: In dieser Welt gibt es nur Individuen, die auf gleicher Höhe liegen und keine die vor b liegen, da b in der ersten Reihe liegt. Es gibt also z.B. auch noch die weitere richtige Lösung: $\neg$ BackOf(c, b) (weil c auf gleicher Höhe liegt).

Ausdruck 4)
Cube(a) $\wedge$ Cube(b) $\vee$ Cube(c)
Wff: Nein
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: In Tarskis Welt binden Konjunktionen und Disjunktionen gleich stark. Also ist die Formulierung nicht eindeutig. Man weiß nicht, welche Junktoren zusammengehören und muss daher Klammern setzen, um eindeutige Aussagen treffen zu können. In diesem Fall ist es egal, welche zwei atomaren Aussagen man einklammert. Beide Versionen führen zu wahren Aussagen.
Übersetzung: 1.) a ist ein Würfel und entweder b oder c (oder auch beide) sind Würfel.
Oder: 2.) a und b sind beides Würfel oder c ist ein Würfel.
Richtige Formulierung: 1.) Cube(a) $\wedge$ (Cube(b) $\vee$ Cube(c))
Oder: 2.) (Cube(a) $\wedge$ Cube(b)) $\vee$ Cube(c)
Hinweis: Normalerweise gibt es die Konvention, dass $\wedge$ stärker bindet als $\vee$. Daher ist hier eventuell die 2. Version zu bevorzugen.

Ausdruck 5)
Cube(a) $\leftrightarrow$ Cube(b) $\leftrightarrow$ Cube(e)
Wff: Nein
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: Die Bisubjunktion verbindet immer genau zwei Aussagen miteinander. Die Verbindung von mehr als zwei Aussagen durch mehrere Bisubjunktionen hintereinander ist nicht definiert. Es fehlt die hierarchische Ordnung. Es entsteht erst dann eine Aussage, wenn zwei der atomaren Aussagen durch Klammern eine einzige zusammengesetzte Aussage bilden. Da a ein Würfel ist und b und e nicht, ist es egal welche zwei atomaren Aussagen man einklammert. Es entsteht in jedem Fall eine wahre Aussage.
Übersetzung: 1.) a ist genau dann ein Würfel, wenn b und e entweder beide Würfel oder beide keine Würfel sind.
Oder: 2.) e ist genau dann ein Würfel, wenn a und b entweder beide Würfel sind oder beide keine Würfel sind.
Richtige Formulierung: 1.) Cube(a) $\leftrightarrow$ (Cube(b) $\leftrightarrow$ Cube(e))
Oder: 2.) (Cube(a) $\leftrightarrow$ Cube(b)) $\leftrightarrow$ Cube(e)

Ausdruck 6)
$\exists$ x $\neg$(Cube x)
Wff: Nein
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: Die Klammer um die Variable x fehlt.
Hinweis: Die Klammer hinter dem $\neg$ ist unnötig, da es nur eine einzige atomare Formel ist.
Übersetzung: Es gibt mindestens ein x, dass kein Würfel ist.
Richtige Formulierung: $\exists$ x $\neg$Cube (x)

Ausdruck 7)
$\exists$ a (Cube(a) $\wedge$ Small(a))
Wff: Nein
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: a ist in Tarskis Welt immer eine Individuenkonstante. Der Existenzquantor bindet aber nur Variablen. Für Variablen sind hier nur die Buchstaben u, v, w, x, y, z zulässig.
Übersetzung: Es gibt mindestens einen kleinen Würfel.
Richtige Formulierung: $\exists$ x (Cube(x) $\wedge$ Small(x))

Ausdruck 8)
$\exists$ x Cube(x) $\wedge$ Small(x)
Wff: Ja
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: Der Existenzquantor bindet sich aufgrund fehlender Klammern nur an die erste atomare Formel Cube(x). Das x aus Small(x) bleibt daher eine ungebundene, freie Variable, über die man keine Aussage machen kann. Eine Aussage ist eine Wff ohne freie Variablen.
Übersetzung: Es gibt mindestens einen kleinen Würfel.
Richtige Formulierung: $\exists$ x (Cube(x) $\wedge$ Small(x))

Ausdruck 9)
$\exists$ y (Tet(y) $\wedge$ Large(y))
Wff: Ja
Aussage: Ja
Wahrheitswert: wahr
Übersetzung: Es gibt mindestens ein großes Tetraeder.

Ausdruck 10)
$\forall$ y (Cube(x) $\rightarrow$ $\neg$ Medium(x))
Wff: Ja
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: Der Allquantor bindet nur die Variable y (ohne weitere Informationen). Die Variable x bleibt ungebunden. So entsteht keine Aussage.
Übersetzung: Alle Würfel sind nicht mittelgroß.
Richtige Formulierung: $\forall$ x (Cube(x) $\rightarrow$ $\neg$ Medium(x))

Ausdruck 11)
$\forall$ x (Tet(x) $\wedge$ Small(x) $\rightarrow$ FrontOf(x, e))
Wff: Nein
Aussage: Nein
Wahrheitswert: nicht vorhanden
Problem: Die Bindungsstärke der Junktoren ist in Tarskis Welt nicht hierarchisch geordnet, also muss man Klammern setzen, um eine eindeutige Aussage formulieren zu können. In diesem Fall kommen nur Klammern um die beiden ersten atomaren Formeln in Frage, da andernfalls in dieser Welt eine falsche Aussage entstehen würde.
Übersetzung: Alle kleinen Tetraeder liegen vor e.
Richtige Formulierung: $\forall$ x ((Tet(x) $\wedge$ Small(x)) $\rightarrow$ FrontOf(x, e))

Ausdruck 12)
$\forall$ u ((Tet(u) $\wedge$ Medium(u)) $\rightarrow$ BackOf(u, c))
Wff: Ja
Aussage: Ja
Wahrheitswert: wahr
Übersetzung: Alle mittelgroßen Tetraeder liegen hinter c.

<u>Aufgabe 2)</u>

S. 131 Nr. 15

Aufgabenstellung:
Gegeben sind fünf englische Sätze, welche in der Leibniz-Welt wahre Aussagen sind.
Diese sollen in FOL übersetzt werden und in 5-15.sen gespeichert werden. Anschließend soll die Welt, so verändert werden, dass alle Aussagen gleichzeitig falsch sind.

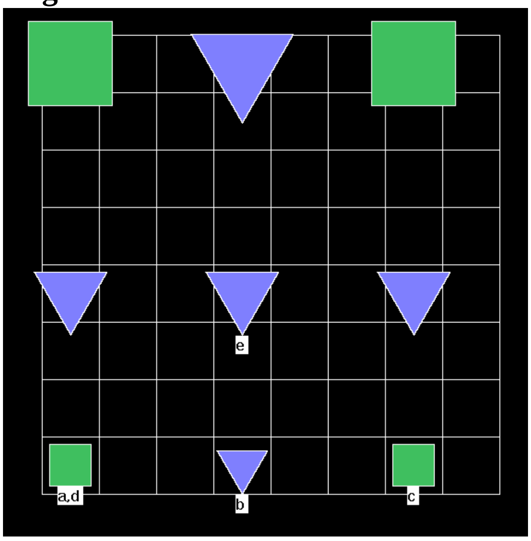
Hinweis: Oft lässt sich der englische Ausdruck mit mehreren äquivalenten Aussagen in FOL darstellen. Ich habe diese Äquivalenzen deswegen hier zusätzlich mit aufgeschrieben.

Lösung:

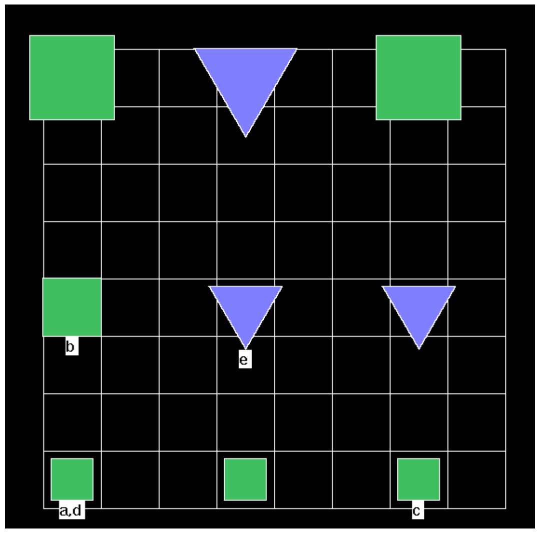
Englisch:

1. b is a tetrahedron and is smaller than e.
2. There are no medium sized cubes.
3. Nothing is in front of b.
4. Every cube is either in front of or in back of e.
5. No cube is between a and c.

Gegebene Welt Leibniz.wld:



Geänderte Welt:



FOL:

T 1. $tet(b) \wedge smaller(b,e)$

T 2. $\forall x\ (medium(x) \rightarrow \neg cube(x))$

T 3. $\forall x\ \neg FrontOf(x,b)$

T 4. $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow (FrontOf(x,e) \vee BackOf(x, e)))$

T 5. $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \neg Between(x,a,c))$

FOL:

F 1. $tet(b) \wedge smaller(b,e)$

F 2. $\forall x\ (medium(x) \rightarrow \neg cube(x))$

F 3. $\forall x\ \neg FrontOf(x,b)$

F 4. $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow (FrontOf(x,e) \vee BackOf(x, e)))$

F 5. $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \neg Between(x,a,c))$

Ausdruck 1)

Englisch: b is a tetrahedron and is smaller than e.
Deutsch: b ist ein Tetraeder und kleiner als e.
FOL: $tet(b) \wedge smaller(b,e)$

Ausdruck 2)

Englisch: There are no medium sized cubes.
Deutsch: Es gibt keine mittelgroßen Würfel.
FOL: $\forall x\ (medium(x) \rightarrow \neg cube(x))$

$\Leftrightarrow \quad \neg \exists x\ \neg (medium(x) \rightarrow \neg cube(x))$

$\Leftrightarrow \quad \neg \exists x\ \neg (\neg medium(x) \vee \neg cube(x))$

$\Leftrightarrow \quad \neg \exists x\ (\neg \neg medium(x) \wedge \neg \neg cube(x))$

$\Leftrightarrow \quad \neg \exists x\ (medium(x) \wedge cube(x))$

$\Leftrightarrow \quad \forall x\ (cube(x) \rightarrow \neg medium(x))$

Ausdruck 3)
Englisch: Nothing is in front of b.
Deutsch: Nichts liegt vor b.
FOL: $\forall x\ \neg \text{FrontOf}(x,b)$
$\Leftrightarrow$ $\neg \exists x\ \text{FrontOf}(x,b)$

Ausdruck 4)
Englisch: Every cube is either in front of or in back of e.
Deutsch: Jeder Würfel liegt entweder vor oder hinter e.
FOL: $\forall x\ (\text{cube}(x) \rightarrow (\text{FrontOf}(x,e) \vee \text{BackOf}(x,e)))$
$\Leftrightarrow$ $\forall x\ (\neg \text{cube}(x) \vee (\text{FrontOf}(x,e) \vee \text{BackOf}(x,e)))$
$\Leftrightarrow$ $\forall x\ (\neg \text{cube}(x) \vee \text{FrontOf}(x,e) \vee \text{BackOf}(x,e))$

Ausdruck 5)
Englisch: No cube is between a and c.
Deutsch: Kein Würfel liegt zwischen a und c.
FOL: $\forall x\ (\text{cube}(x) \rightarrow \neg \text{between}(x,a,c))$
$\Leftrightarrow$ $\neg \exists x\ \neg (\text{cube}(x) \rightarrow \neg \text{between}(x,a,c))$
$\Leftrightarrow$ $\neg \exists x\ \neg (\neg \text{cube}(x) \vee \neg \text{between}(x,a,c))$
$\Leftrightarrow$ $\neg \exists x\ (\neg \neg \text{cube}(x) \wedge \neg \neg \text{between}(x,a,c))$
$\Leftrightarrow$ $\neg \exists x\ (\text{cube}(x) \wedge \text{between}(x,a,c))$
$\Leftrightarrow$ $\forall x\ (\text{between}(x,a,c) \rightarrow \neg \text{cube}(x))$

Aufgabe 3)
S. 143 Nr. 28

Aufgabenstellung:
Gegeben sind folgende Prämissen:
1. $\forall x\ (\text{cube}(x) \vee \text{dodec}(x))$
2. $\forall x\ (\text{cube}(x) \rightarrow (\text{large}(x) \wedge \text{LeftOf}(c,x)))$
3. $\forall x\ (\neg \text{small}(x) \rightarrow \text{tet}(x))$

Aufgabe: Folgt aus diesen Prämissen small(c)?

Logische Analyse:
Alle drei Prämissen sind jeweils Allaussagen, die sich auf Tarskis Welt beziehen. Aus 1. folgt, dass alle Individuen in der Welt entweder Würfel oder Dodekaeder sind. Eine Besonderheit in Tarskis Welt ist, dass kein Individuum die Prädikate cube(), dodec() und tet() gleichzeitig als Eigenschaft besitzen kann. Es kann immer nur eine der drei Größen-eigenschaften besitzen. Daher kommt das ausschließende Oder bei $(\text{cube}(x) \vee \text{dodec}(x))$, außerdem kann es dann auch kein einziges Tetraeder in der Welt geben.

Es gibt also aus 1. eine Fallunterscheidung von zwei Fällen:
- **a) Ein Individuum ist ein Würfel**
- **b) Ein Individuum ist ein Dodekaeder**

Zu a) Ein Individuum ist ein Würfel:
Aus 2. wissen wir, dass alle Würfel groß sein müssen und dass sie außerdem auch noch rechts vom Individuum c liegen müssen.

Da alle Würfel jetzt groß sind, müssen wir noch die 3. Prämisse prüfen: Alle nicht kleinen Individuen sind Tetraeder. Dies ist ein Widerspruch, da die großen Würfel zwar nicht klein sind, aber eben auch nie gleichzeitig auch Tetraeder sein können.
Also gibt es in der Welt überhaupt keine Würfel. Bleibt noch Fall b).

Zu b) Ein Individuum ist ein Dodekaeder:
Beim bisherigen Prüfen haben wir herausgefunden, dass alle Objekte nur noch Dodekaeder sein können. Dodekaeder gibt es in Tarskis Welt in drei verschiedenen Größen: small(), medium() und large(). Hierbei ist auch wieder zu beachten, dass ein Individuum jeweils nur ein einziges dieser drei Größenprädikate gleichzeitig besitzen darf. Es bleiben also noch drei weitere Fälle zu prüfen: b1) small, b2) medium und b3) large.
Zu b2) medium und b3) large:
Aus der dritten Prämisse wissen wir, dass alle nicht kleinen Individuen Tetraeder sein müssen. Dies trifft für beide Fälle b2) und b3) zu. Also müssten alle mittelgroßen und alle großen Dodekaeder nach 3. auch gleichzeitig Tetraeder sein. Dieser Fall kann nie wahr werden und ist somit ist ein Widerspruch. Also kann es in der ganzen Welt auch keine mittelgroßen und großen Dodekaeder geben. Als einzige Möglichkeit bleibt jetzt nur noch Fall b1).
Zu b1) small:
Ein Individuum ist ein kleines Dodekaeder. Dieser Fall widerlegt keine der drei Prämissen. 1. ist wahr, weil es ein Dodekaeder ist. 2. ist wahr, weil es kein Würfel ist. 3. ist wahr, weil es klein ist.

Konklusion:
Alle Individuen in dieser Tarski-Welt sind also kleine Dodekaeder (oder die Welt ist leer). In FOL: $\forall$ x (small(x) $\wedge$ dodec(x)). Also besitzt das Individuum c in dieser Welt auch zwingend die Eigenschaft small(c). Also gilt small(c). Diese Schlussfolgerung ist somit richtig und ein Gegenbeispiel gibt es nicht.

Beweis:

1. $\forall$ x (cube(x) $\vee$ dodec(x))	
2. $\forall$ x (cube(x) $\rightarrow$ (large(x) $\wedge$ LeftOf(c,x)))	
3. $\forall$ x ($\neg$ small(x) $\rightarrow$ tet(x))	
4. $\neg$ small(c)	
5. $\neg$ small(c) $\rightarrow$ tet(c)	$\forall$ Elim: 3
6. tet(c)	$\rightarrow$ Elim: 5, 4
7. cube(c) $\vee$ dodec(c)	$\forall$ Elim: 1
8. tet(c) $\wedge$ (cube(c) $\vee$ dodec(c))	$\wedge$ Intro: 6, 7
9. $\neg\neg$ small(c)	$\neg$ Intro: 4-8
10. small(c)	$\neg$ Elim: 9

Anders als in der logischen Analyse ist der Beweis viel kürzer. Am einfachsten ist ein Widerspruchsbeweis. Ich nehme das Gegenteil von dem an, was ich zeigen möchte und führe dies zu einem Widerspruch. Hier ist die zu zeigende Konklusion small(c) (Zeile 10) und das Gegenteil $\neg$small(c) (Zeile 4). Im Unterbeweis selber (Zeilen 4 bis 8) zeige ich mit Allbeseitigungen (Zeile 5 und 7) und Modus Ponens (Zeile 6), was speziell im Fall $\neg$small(c) in der Welt gelten muss.
Dies führt dann zum Widerspruch: tet(c) $\wedge$ (cube(c) $\vee$ dodec(c)) (Zeile 8). Dies ist ein Widerspruch, da c nicht gleichzeitig ein Tetraeder und noch eine andere Form sein kann (Würfel oder Dodekaeder). Wenn man die Distributivität anwendet wird dies noch deutlicher:

$tet(c) \wedge (cube(c) \vee dodec(c)) \Leftrightarrow (tet(c) \wedge cube(c)) \vee (tet(c) \wedge dodec(c))$
Alle beiden Disjunkte $(tet(c) \wedge cube(c))$ und $(tet(c) \wedge dodec(c))$ führen unmittelbar zu einem Widerspruch und somit ist die gesamte Disjunktion ein Widerspruch.
Also gilt die ursprüngliche Annahme $\neg small(c)$ nicht und somit dann dessen Gegenteil $\neg\neg small(c)$ (Zeile 9). Wenn man jetzt noch das Gesetz der doppelten Negation anwendet, hat man small(c) bewiesen (Zeile 10).